M. Jaćimović   D. Kalaj

Uvod u kompleksnu analizu

I izdanje

Univerzitet Crne Gore

Podgorica, 2009

Komisija za izdavačku djelatnost i informatiku Univerziteta Crne Gore odobrila je 15. februara 2009. rješenjem br. 02/2–301?? da se ovaj rukopis štampa kao univerzitetski udžbenik.

Autori

Prof. dr Milojica Jaćimović
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici

Prof. Dr David Kalaj
vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici

Recenzenti

Prof. dr Miodrag Perović
Redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici

Prof. Dr Miodrag Mateljević
Redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu

Predgovor

Knjiga je nastala na osnovu predavanja koje su autori u posljednjih desetak godina držali na Prirodno-matematičkom i Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta Crne Gore. Očekujemo da ona može biti interesantna širem krugu čitalaca, prije svega studentima dodiplomskih i magistarskih studija na tehničkim i prirodnomatematičkim fakultetima.

Knjiga se sastoji od pet poglavlja. Prvo je posvećeno kompleksnim brojevima, drugo funkcijama kompleksne promjenljive, treće integraciji kompleksnih funkcija i Cauchyevoj teoremi, četvrto konformnim preslikavanjima i peto Laplaceovim transformacijama. Razumijevanju teorije izložene u osnovnom tekstu treba da pomognu primjeri, koje smo pažljivo birali. Na kraju svake glave dati su i zadaci za samostalan rad. Smatramo da se samo tako može postići da se knjiga koristi bez obaveznog korišćenja druge literature.

Prvu verziju rukopisa napravio je Milojica Jaćimović. Ta verzija je kasnije značajno modifikovana. Oba autora su učestvovala u pisanju konačne verzije knjige, ali je u osnovi Milojica Jaćimović napisao glavu posvećenu integraciji i glavu o Laplasovoj transformaciji, dok je ostale tri glave napisao David Kalaj.

Zahvaljujemo recenzentima, profesorima Miodragu Perović i Miodragu Mateljević na pažljivom čitanju knjige. Oni su pomogli da se otklone neke greške i poboljša rukopis.

Svaku primjedbu čitalaca autori će pažljivo proučiti.

Sadržaj

Spisak slika **7**

1 Kompleksni brojevi **9**
1 Polje kompleksnih brojeva . . . 9
1.1 Geometrijska interpretacija kompleksnog broja . . . 12
1.2 Modul i kompleksno konjugovanje . . . 12
1.3 Metrika na $\mathbb{C}$ . . . 15
1.4 Argument i trigonometrijski oblik kompleksnog broja 17
2 Proširena kompleksna ravan. Riemannova sfera . . . 24
2.1 Metrika na $\overline{\mathbb{C}}$ . . . 27
3 Nizovi i konvergencija u $\mathbb{C}$ i $\overline{\mathbb{C}}$ . . . 30
3.1 Konvergentni nizovi . . . 31
3.2 Brojni red . . . 38
3.3 Beskonačni proizvod . . . 44
4 Otvoreni i zatvoreni skupovi u $\mathbb{C}$ i $\overline{\mathbb{C}}$. Kompaktnost. . . . 50
4.1 Otvoren i zatvoren skup . . . 51
4.2 Kompaktni skupovi . . . 56
5 Put i kriva u $\mathbb{C}$. Povezan skup i oblast u $\mathbb{C}$. . . . 62
5.1 Kriva i put . . . 63
5.2 Povezan skup . . . 66

2 Kompleksne funkcije **75**
1 Granična vrijednost i neprekidnost . . . 75
1.1 Primjeri . . . 79
2 Elementarne funkcije . . . 85
2.1 Stepena funkcija . . . 85
2.2 Polinomi i racionalne funkcije. . . . 85

2.3 Eksponencijalna funkcija. 86
2.4 Svojstva eksponencijalne funkcije 87
2.5 Trigonometrijske i hiperboličke funkcije 89
2.6 Logaritamska funkcija 90
2.7 Korijena funkcija 91
2.8 Opšta stepena funkcija 93
2.9 Inverzne trigonometrijske i inverzne hiperboličke funkcije. 94
3 Analitičke funkcije 98
4 Harmonijske funkcije. Kompleksni potencijal 108
5 Funkcionalni redovi 120
6 Stepeni redovi. 123

3 Cauchyeva teorema i njene posljedice 133
1 Definicija integrala 133
1.1 Integral kompleksne funkcije realne promjenljive . . 133
1.2 Integral kompleksne funkcije po putu 133
1.3 Integracija funkcionalnog reda 139
2 Cauchyeva teorema i Cauchyeva formula 143
3 Posljedice Cauchyevih teorema 156
4 Posljedice Cauchyevih teorema - nastavak 162
5 Laurentov red. Izolovani singulariteti 171
6 Primjena rezidiuma 187
7 Primjena reziduuma za izračunavanje integrala 193
8 Primjena logaritamskog reziduma 205

4 Konformna preslikavanja 213
1 Geometrijske i topološke karakteristike funkcija 213
2 Bilinearna preslikavanja 227
3 Elementarne funkcije i konformna preslikavanja 241
4 Opšti principi konformnih preslikavanja 256
5 O primjenama teorije konformnih preslikavanja 274
5.1 Dirichletov problem u krugu i Poissonov integral po jediničnoj kružnici 274
5.2 Dirichletov problem u poluravni i Poissonov integral na realnoj pravoj 276
6 Christoffel-Schwartzov integral 279

5 Operacioni račun **291**
1 Laplaceove transformacije 291
2 Svojstva Laplaceove transformacije 297
3 Inverzija Laplaceove transformacije 305
4 Rješavanje diferencijalnih jednačina 319
4.1 Integralne i integro-diferencijalne jednačine 322
4.2 Parcijalne diferencijalne jednačine 323

Bibliografija **336**

Spisak oznaka **338**

Indeks **340**

Spisak slika

1.1 Konjugovano kompleksan broj i modul kompleksnog broja . 13
1.2 Polarni (trigonometrijski) zapis kompleksnog broja. 18
1.3 Stereografska projekcija. 25
1.4 Donje i gornje ograničenje funkcije sinus linearnim funkcijama. 35
1.5 Unutrašnjost, spoljašnjost i granica skupa A. 53
1.6 Zbir puteva(krivih). 66
1.7 Primjeri oblasti. 70

2.1 $\mathbb{R}-$linearno preslikavanje slika krug u elipsu i kvadrat u paralelogram 100
2.2 $\mathbb{C}-$linearno preslikavanje slika krug u krug i kvadrat u kvadrat 101

3.1 Opadajući niz trouglova Δ_n, $n \in \mathbb{N}$. 144
3.2 Orijentacija granice višestruko povezane oblasti 149
3.3 Primjeri indeksa tačaka u odnosu na puteve 153
3.4 Laurentova teorema i četiri kruga 172

4.1 Konformno preslikavanje u tački. 216
4.2 Simetrija u odnosu na kružnicu $k(z_0, R)$ i pravu p. 230
4.3 Konformno preslikavanje jediničnog diska na sebe. 234
4.4 Preslikavanje gornje poluravni kvadratnom funkcijom. . . . 242
4.5 Kardioida. 243
4.6 Preslikavanje horizontalne trake i polutrake eksponencijalnom funkcijom. 245

4.7 Slika jedinične kružnice eksponencijalnom funkcijom. . . . 246
4.8 Preslikavanje vertikalnih polutraka funkcijama $w = \sin z$ i $w = \cos z$ 247
4.9 Preslikavanje vertikalnih polutraka funkcijom $w = \tan z$. . . . 248
4.10 Slika spoljašnjosti jediničnog diska funkcijom Žukovskog. . 250
4.11 Profil Žukovskog. 251
4.12 Princip simetrije Riemanna-Schwartza u odnosu na prave. . 269
4.13 Princip simetrije Riemanna-Schwartza u odnosu na kružnice. 270
4.14 Konformno preslikavanje poluravni na pravougaonik 284

5.1 Integracija originala. 301
5.2 Inverzija Laplaceove transformacije. 309
5.3 Telegrafska jednačina. 330

Glava 1

Kompleksni brojevi

1 Polje kompleksnih brojeva

Neke kvadratne jednačine nemaju rješenja u polju[1] realnih brojeva. Kada se, na primjer, zaključi da jednačina $x^2 - 2 = 0$ nema rješenja u polju racionalnih brojeva, rješenje se pronađe u širem polju - polju realnih brojeva. U tom polju svaka jednačina oblika $x^n - a = 0, a > 0, n \in \mathbb{N}$, ima rješenje[2]. Zanimljivo je da se proširenjem polja realnih brojeva $\mathbb{R}$ do polja, u kome će jednačina $x^2 + 1 = 0$ imati rješenje, dovodi do polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, u kome će svaki polinom nad tim poljem imati bar jednu nulu.

Proširenje polja $\mathbb{R}$ do polja kompleksnih brojeva, može se opisati na sljedeći način.

Sa $\mathbb{R}^2$ označimo skup uređenih parova realnih brojeva: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. U ovom skupu definišimo operacije sabiranja i množenja na sljedeći način:

$$(x, y) + (x_1, y_1) := (x + x_1, y + y_1); \;\; \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$

$$(x, y) \cdot (x_1, y_1) := (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1).$$

[1]Definiciju polja i drugih algebarskih struktura i relacija koje ćemo koristiti u ovoj knjizi čitaoc može naći u udžbenicima algebre.

[2]Svaka takva jednačina ima rješenje i u polju realnih algebarskih brojeva, koje je pravo potpolje polja realnih brojeva

Teorema 1.1. *Trojka* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *je polje. Preslikavanje koje realnom broju* x *pridružuje par* $(x, 0)$ *je izomorfizam polja realnih brojeva na potpolje* $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ *polja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Dokaz. Neposredno se provjerava da je par $(\mathbb{R}^2, +)$ Abelova grupa čiji je neutralni element u odnosu na sabiranje par $(0, 0)$, a suprotan (inverzan u odnosu na sabiranje) paru (x, y) je par $(-x, -y)$. U odnosu na množenje, neutralni element je par $(1, 0)$. Jednostavno se provjeravaju i svojstva asocijativnosti i komutativnosti množenja i distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje. Inverzni element paru $z = (x, y) \neq 0$ u odnosu na množenje je par $z' = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$, koji se označava sa z^{-1} ili sa $\frac{1}{z}$.

Za dokaz drugog dijela tvrđenja dovoljno je primijetiti da važi

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),\ (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0).$$

□

Definicija 1.2. (a) *Polje* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *iz prethodne teoreme naziva se poljem kompleksnih brojeva.* Polje kompleksnih brojeva označavaćemo sa $\mathbb{C}$.

(b) *Elemente skupa* $\mathbb{R}^2$ *iz prethodne teoreme* nazivamo *kompleksnim brojevima.* a sam skup tada označavamao sa $\mathbb{C}$ i nazivamo *skupom kompleksnih brojeva.*

(c) Kompleksni broj $(0, 1) \in \mathbb{C}$ označavamo sa i. Kompleksni broj $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ možemo pisati u obliku $z = (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + iy$, što je inače standardan način pisanja kompleksnih brojeva.

(d) Broj x nazivamo *realnim* dijelom a broj y *imaginarnim* dijelom kompleksnog broja $z = x + iy$ i pišemo $x = \mathrm{Re}\ z$ i $y = \mathrm{Im}\ z$. Uzimajući u obzir izomorfizam $x \rightarrowtail (x, 0)$ polja $\mathbb{R}$ i potpolja $\{(x, 0) : x \in R\}$ polja kompleksnih brojeva, kompleksan broj $z = x + 0i$ može se poistovjetiti sa realnim brojem x (i pisati $z = x$). Za kompleksne brojeve oblika $z = (0, y) = 0 + yi$ (koje kratko zapisujemo kao $z = yi$) kažemo da su čisto imaginarni. Skup $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ nazivamo *realnom osom* a skup $\{(0, y) : x \in \mathbb{R}\}$ *imaginarnom osom* skupa kompleksnih brojeva.

Sljedeći primjer pokazuje da polje $\mathbb{C}$ zadovoljava jedan od zahtjeva koje smo postavili na početku: jednačina $z^2 = -1$ ima rješenje u polju $\mathbb{C}$.

Primjer 1.3. Prvo, imamo da je $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, što znači da je $z = i$ rješenje kvadratne jednačine $z^2 + 1 = 0$. I $z = -i$ je, rješenje ove jednačine.

Primjer 1.4. Pokazaćemo da proizvoljna linearna i kvadratna jednačina sa koeficijentima u polju kompleksnih brojeva, ima rješenje u tom polju.

Neka su, dakle, a, b i c kompleksni brojevi. Posmatrajmo jednačinu

$$az^2 + bz + c = 0, \text{ pri čemu je } a \neq 0 \text{ ili } b \neq 0.$$

Ako je $a = 0$ tada je $b \neq 0$ i jedino rješenje jednačine je $z = -\frac{c}{b}$.

Lako se provjerava da ako je c pozitivan realan broj, tada su $z_1 = i\sqrt{c}$ i $z_2 = -i\sqrt{c}$ jedina rješenja jednačine $z^2 + c = 0$.

Pretpostavimo da je $a = 1$ i $b = 0$. Jednačina je tada ekvivalentna sa $z^2 + c = 0$. Ako je $c = 0$ tada je jedino rješenje ove jednačine $z = 0$. Ako je $c = \alpha + i\beta \neq 0$, tada je $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$ ili $\mathbb{R} \ni \beta \neq 0$, a jednačina se svodi na sistem jednačina

$$x^2 - y^2 = -\alpha \text{ i } 2xy = -\beta.$$

gdje je $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Kvadriranjem druge jednačine ovog sistema i kombinovanjem sa prvom, dobijamo $4x^4 + 4\alpha x^2 - \beta^2 = 0$ odnosno $(x^2 + \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$, što se na kraju svodi na

$$x^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \geq \frac{-\alpha + |\alpha|}{2} \geq 0.$$

Odavde slijedi da je

$$y^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \geq \frac{-\alpha + |\alpha|}{2} \geq 0.$$

Na taj način dobijamo da su rješenja jednačine $z^2 + c = 0$ (kažemo da su to korijeni kompleksnog broja $-c$)

$$z_{1/2} = \pm(x + iy) = \pm\left(\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}\right).$$

Na kraju razmotrimo opšti slučaj. Jednačina

$$az^2 + bz + c = 0, \; a \neq 0,$$

se može napisati u obliku

$$(z + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0,$$

a dalje, smjenom $w = z + \frac{b}{2a}$ i $e = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \gamma + i\delta$ svesti na jednačinu $w^2 + e = 0$, čija su rješenja

$$w_{1/2} = \pm(u + iv) = \pm\sqrt{\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{2}}.$$

Konačno, rješenja date jednačine su

$$z_{1/2} = -\frac{b}{2a} + w_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{2}}$$

Istaknimo još jednom da su svi brojevi koji figurišu kao argumenti korjenovanja pozitivni realni brojevi, pa su odgovarajući kvadratni korijeni definisani.

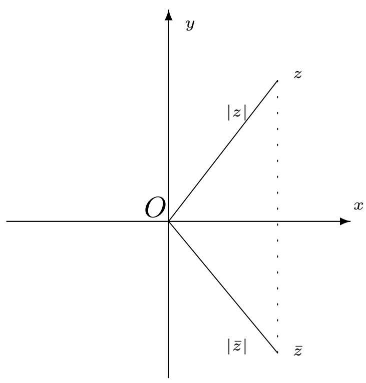
Napomena. Kasnije ćemo (čak više puta) dokazati da svaki polinom sa koeficijentima u polju $\mathbb{C}$ ima rješenje u polju $\mathbb{C}$.

1.1 Geometrijska interpretacija kompleksnog broja

Ako kompleksan broj $z = x + yi$ posmatramo kao tačku (x, y) Dekartove koordinatne ravni, tada i operacije sa kompleksnim brojevima imaju geometrijsko značenje. Naime, tačke se mogu poistovjetiti sa vektorima, a sabiranje kompleksnih brojeva (kao uređjenih parova realnih brojeva), odgovara sabiranju vektora (zadatih svojim koordinatama), pa se sabiranje kompleksnih brojeva može poistovjetiti sa sabiranjem odgovarajućih vektora i geometrijski interpretirati pomoću pravila paraleograma. Odavde naravno slijedi i odgovarajuća interpretacija operacije oduzimanja. O geometrijskoj interpretaciji operacija množenja i dijeljenja govorićemo kasnije.

1.2 Modul i kompleksno konjugovanje

Ako je $z = x + iy$ kompleksan broj, njemu *konjugovano kompleksan* je broj $\bar{z} = x - iy$. Primijetimo da je, u geometrijskoj interpretaciji, broj $\bar{z}$ simetričan broju z u odnosu na realnu osu. *Modul (apsolutna vrijednost* ili *norma)* kompleksnog broja $z = x + iy$, je broj $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Na



Slika 1.1: Konjugovano kompleksan broj i modul kompleksnog broja

slici 1.1 data je geometrijska interpretacija konjugovanja i apsolutne vrijednosti kompleksnog broja.

U sljedećim dvijema teoremama formulišu se osnovna svojstva apsolutne vrijednosti i kompleksnog konjugovanja.

Teorema 1.5. *Preslikavanje $z \to \bar{z}$ iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ ima sljedeća svojstva:*

(i) $\bar{\bar{z}} = z$.

(ii) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

(iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

(iv) $\overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$.

(v) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\; z$.

(vi) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\; z$.

Dokaz. Radi ilustracije, dokažimo *(iv)*. Neka je $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$. Tada je

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - y_2x_1)}{x_2^2 + y_2^2},$$

pa je
$$\bar{w} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Dalje je

$$w_1 = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}z_2}{\overline{z_2}z_2} = \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \overline{w},$$

što je i trebalo dokazati.

Dokazi ostalih svojstava izvode se na sličan način i njih ostavljamo čitaocu. □

Teorema 1.6. *Preslikavanje $z \to |z|$ iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:*

(i) $|z| \geq 0$.

(ii) $|z|^2 = z\bar{z}$.

(iii) $|z| = 0$ *ako i samo ako* $z = 0$.

(iv) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(v) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(nejednakost trougla).*

(vii) $||z| - |w|| \leq |z + w|$.

(viii) $|w^{-1}| = |w|^{-1}$.

(ix) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Dokaz. Tvrđenje (i) je očigledno. Ako je $z = x + iy$, onda je $\bar{z} = x - iy$, pa je

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + ixy - iyx + y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

što daje (ii). Svojstvo (iii) je direktna posljedica definicije modula. Iz $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$ slijedi (iv). Nejednakosti (v) slijede direktno iz definicije modula kompleksnog broja. Iz (ii) i Teoreme 1.5 slijede jednakosti

$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2+z\bar{w}+\bar{z}w+|w|^2 = |z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

i

$$|z-w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}).$$

Koristeći nejednakost trougla za realne brojeve, pa ponovo Teoremu 1.5 i na kraju (iv) i (v) dobijamo

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

i

$$|z-w|^2 \geq |z|^2 - 2|z||w| + |w|^2 = (|z| - |w|)^2.$$

Odavde slijede nejednakosti (vi) i (vii). Dokaze nejednakosti (viii) i (ix) ostavljamo čitaocu. $\square$

Primjenjujući matematičku indukciju i nejednakost trougla za normu, dobijamo nejednakost

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

1.3 Metrika na $\mathbb{C}$

Definicija 1.7. Funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definisanu na nepraznom skupu X nazivamo metrikom na X a (X, d) metričkim prostorom, ako d zadovoljava sljedeće uslove:

1. $d(x, y) \geq 0$ (pozitivnost);
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$ (razlikovanje tačaka);
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetrija);
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (nejednakost trougla).

Sljedeća teorema je posljedica Teorema 1.6.

Teorema 1.8. *Ako je $d(z, w) = |z - w|, z, w \in \mathbb{C}$, tada je $(\mathbb{C}, d)$ metrički prostor.*

Geometrijski, $d(z, w) = |z - w|$, predstavlja *(euklidsko, dakle standardno) rastojanje* tačaka u koordinatnoj ravni, koje odgovaraju kompleksnim brojevima z i w, u. Kažemo da je to *euklidska metrika* na $\mathbb{C}$.

Primjer 1.9. Neka su $z_1, \dots, z_k$ i $w_1, \dots, w_k$ kompleksni brojevi i

$$A = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2,\ B = \sum_{i=1}^{m} |w_i|^2,\ C = \sum_{i=1}^{n} z_i w_i.$$

Tada je

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{n} |Bz_i - C\bar{w}_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (Bz_i - C\bar{w}_i)(B\bar{z}_i - \bar{C}w_i) \\ = AB^2 - B|C|^2 - B|C|^2 + B|C|^2 &= B(AB - |C|^2). \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $AB - |C|^2 < 0$, što znači da za kompleksne brojeve $z_1, z_2, \dots, z_n$ i $w_1, w_2, \dots, w_n$ važi Schwartzova nejednakost:

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i w_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |w_i|^2.$$

Definicija 1.10 (Kružnica)**.** *Kružnicom* u $\mathbb{C}$ sa centrom u tački z_0 i poluprečnikom r nazivamo skup tačaka $S(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$. Ako je $z_0 = 0$ i $r = 1$, $S(z_0, r)$ se naziva jediničnom kružnicom, koja se često označava sa S^1.

Primjer 1.11. Ako je k kružnica u $\mathbb{C}$, tada se njena jednačina

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0,$$

korišćenjem kompleksne promjenljive, može zapisati u obliku

$$\alpha z\bar{z} + \varepsilon z + \overline{\varepsilon}\overline{z} + \delta = 0,$$

gdje je $\varepsilon = \frac{1}{2}(\beta + i\gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Važi i obrnuto: svaka jednačina oblika

$$\alpha z\bar{z} + \varepsilon z + \overline{\varepsilon}\overline{z} + \delta = 0,$$

gdje je $\varepsilon = \beta + i\gamma$ kompleksan, a α i β realni brojevi, pri čemu je $\alpha\delta < |\varepsilon|^2, \alpha > 0$, je jednačina neke kružnice u $\mathbb{C}$.

Čitaocu ostavljamo da posljednji oblik jednačine kružnice svede na oblik iz definicije 1.10 i obratno.

1.4 Argument i trigonometrijski oblik kompleksnog broja

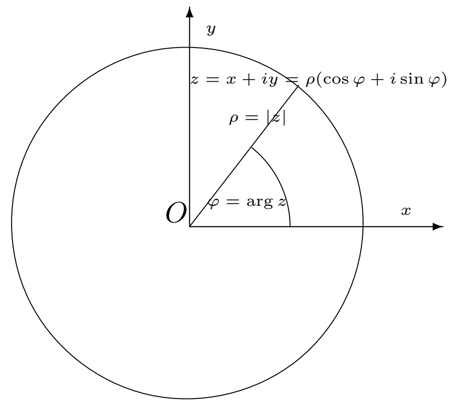
Ako je $z = x + iy \neq 0$, tada svaki realan broj φ koji zadovoljava jednačine

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi,$$

nazivamo *argumentom* kompleksnog broja z. Skup argumenata broja z označavamo sa $\operatorname{Arg} z$. Ovaj skup je neprazan. Zadovoljimo se, za sada, jednim geometrijskim dokazom te činjenice. Posmatrajmo jednačine kojima se definiše argument kompleksnog broja z; Stavljajući $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ i $v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, dobijamo da $u + iv \in S^1$. Sa φ označimo ugao koji sa pozitivnim dijelom realne ose zahvata vektor čiji je početak tačka $(0,0)$ a kraj tačka (u,v) - φ je realan broj i jednak je dužini luka jedinične kružnice koji spaja tačke $(1,0)$ i (u,v) ako je taj luk orijentisan suprotno kretanju kazaljke na satu i negativnoj vrijednosti te dužine ako je luk orijentisan u smjeru kretanja kazaljke na satu. Očigledno, $\cos\varphi = u$ i $\sin\varphi = v$, pa $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Ako su $\varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z)$, onda postoji cijeli broj k, takav da je $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, ili, u drugim oznakama $\varphi_1 \equiv \varphi_2 (\operatorname{mod} 2\pi)$. To znači da je $\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, gdje je φ proizvoljni ugao $\operatorname{Arg} z$. *Ugao* $\varphi \in \operatorname{Arg} z$*,* $z \neq 0$*, koji zadovoljava uslov* $-\pi < \varphi \leq \pi$ *označićemo sa* $\arg z$ *i na taj način definisati funkciju* $z \to \arg z$ *čiji je kodomen* $(-\pi, \pi]$. *Ponekad ćemo sa* $\arg z$ *označiti i funkciju čiji je kodomen* $[0, 2\pi)$*, a iz konteksta će biti jasno o kojoj se funkciji* $z \to \arg z$ *radi.*

U ravni se, zajedno sa Dekartovim koordinatnim sistemom (ili umjesto njega), može posmatrati i polarni koordinatni sistem, koji je određen jednom tačkom (koja se označava sa O i naziva *pol sistema*) i jednom polupravom koja polazi iz tačke O (*polarna osa*). Položaj tačke koja odgovara kompleksnom broju z u polarnom sistemu određen je rastojanjem ρ do pola O i uglom φ vektora $\vec{Oz}$ prema polarnoj osi. Ako se pol i polarna osa polarnog koordinatnog sistema poklope sa koordinatnim početkom i pozitivnim dijelom apscise (x-ose) Dekartovog koordinatnog sistema, onda se



Slika 1.2: Polarni (trigonometrijski) zapis kompleksnog broja.

broj $z = x + iy$ može pisati i u *trigonometrijskom obliku*: (v. sliku 1.2).

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.1}$$

gdje je ρ modul a φ argument broja z.

Naravno, modul broja $z = 0$ jednak je nuli, dok je ugao φ proizvoljan. Reprezentacija (1.1) je pogodna za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva. Naime ako je

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = \rho_1(\cos\psi + i\sin\psi),$$

onda je

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho(\cos(2\pi - \varphi) + i\sin(2\pi - \varphi)) \\ &= \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\end{aligned}$$

$$zw = \rho\rho_1(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)),$$

a ako je $w \neq 0$, onda je

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\rho_1}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)).$$

Odavde slijedi *Moivreova formula*:

$$\forall n \in N,\ z^n = \rho(\cos n\phi + i \sin n\phi).$$

Ona je tačna i ako je n proizvoljan cijeli broj.

Formule za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku imaju geometrijsku interpretaciju. Recimo, proizvod kompleksnih brojeva z i w je kompleksan broj $t = wz$ koji se nalazi na kružnici $S(0, |w||z|)$ i sa $x-$osom zahvata ugao jednak zbiru uglova koji sa $x-$osom zahvataju brojevi z i w. Slična je geometrijska interpretacija količnika kompleksnih brojeva.

Primjer 1.12. Izračunaćemo sume $S_1 = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$ i $S_2 = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$, koristeći trigonometrijski zapis i Moivreovu formulu za stepenovanje kompleksnog broja. Označimo $\cos x + i \sin x$ sa z. Tada je:

$$\begin{aligned} S = S_1 + iS_2 = z + z^2 + \cdots + z^n &= z\frac{z^n - 1}{z - 1} \\ &= \frac{(\cos(n+1)x + -\cos x) + i(\sin(n+1)x - \sin x)}{\cos x - 1 + i \sin x - 1}. \end{aligned}$$

Pri tome je $S_1 = \mathrm{Re}\ S$ i $S_2 = \mathrm{Im}\ S$. Razdavajajući realni i imaginarni dio sume S, dobijamo da je

$$S_1 = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{nx}{2}\right),\ S_2 = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{nx}{2}\right).$$

Razmotrimo sada sljedeći zadatak: Za zadati kompleksan broj $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ i zadati prirodan broj n odrediti kompleksan broj w, takav da je $w^n = z$.

Ako je $z = 0$ onda je i $w = 0$. Pretpostavimo da je $z \neq 0$ i $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$. Tada je

$$w^n = r^n(\cos n\psi + i \sin n\psi).$$

Iz jednakosti $w^n = z$ slijedi

$$r^n = \rho \ \text{ i } \ n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

Odavde dobijamo da je modul broja w jednak $r = \sqrt[n]{|z|}$ i da kao argumente broja w možemo birati brojeve

$$\psi_k = \arg w = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ dobijamo n različitih kompleksnih brojeva $w_k = r(\cos\psi_k + i\sin\psi_k)$ i za svaki od ovih brojeva je $w_k^n = z$. Dalje je $w_n = w_0, w_{n+1} = w_1, \ldots, w_{-1} = w_{n-1}, w_{-2} = w_{n-2}$, i uopšte $w_{mn+l} = w_l$ za svaki cijeli broj m i svako $l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dakle, postoji tačno n različitih kompleksnih brojeva čiji je n-ti stepen jednak zadatom broju $z \neq 0$. Za svaki od tih brojeva se kaže da je n-ti korijen broja z. Specijalno, za kompleksni broj w kažemo da je *primitivni* n*-ti korijen jedinice* ako je $w^n = 1$ i $w^k \neq 1$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Formulom

$$\sqrt[n]{z} = \{w_k = r(\cos\psi_k + i\sin\psi_k) : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

(koja se takođe naziva *Moivreovom formulom*), obuhvaćeni su svi n-ti korijeni broja z.

Secijalno, za kompleksan 1 je

$$\sqrt[n]{1} = \{w_k = (\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}) : k = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Zadaci

1. Dokazati da je polje kompleksnih brojeva najmanje (u smislu inkluzije) polje koje sadrži polje realnih brojeva i u kojem je riješiva jednačina $x^2 + 1 = 0$. (*Uputstvo*: Ako je P polje koje sadrži $\mathbb{R}$ i ako je $a^2 + 1 = 0$, onda je skup $A = \{x + ay : x, y \in \mathbb{R}\}$ potpolje polja $\mathbb{P}$ koje je izomorfno sa poljem $\mathbb{C}$).

2. Dokazati da je polje kompleksnih brojeva izomorfno sa poljem matrica oblika $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} a, b \in \mathbb{R}$.

3. Dokazati da u polju $\mathbb{C}$ nije moguće definisati relaciju poretka $\preceq$, takvu da važi:

   (a) $(0 \preceq x, 0 \preceq y) \Longrightarrow, 0 \preceq xy$;

   (b) $\mathbb{C} = \{z : 0 \preceq z\} \cup \{z : z \preceq 0\}$.

4. Neka je $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom sa realnim koeficientima i z_0 nula polinoma $P_n(z)$. Dokazati da je i $\bar{z}_0$ nula polinoma $P_n(z)$.

5. Neka polinom $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ima n realnih nula. Dokazati da polinom $Q_n(z) = P_n(z+ia) + P_n(z-ia)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$, takodje ima n realnih nula.

6. Neka za kompleksne brojeve z_1, z_2 i z_3 važi jednakost: $z_1 z_2 = z_3^2$. Dokazati da je tada $|\frac{z_1+z_2}{2} + z_3| + |\frac{z_1+z_2}{2} - z_3| = |z_1| + |z_2|$.

7. Zapisati broj $1 + \sin\phi + i\cos\phi$ u trigonometrijskom obliku.

8. Izračunati (a)$(-1 + i\sqrt{3})^{60}$; $(b) \cos\frac{2\pi}{5}$.

9. Dokazati da ako je $(\cos x + i\sin x)^n = 1$, onda je $(\cos x - i\sin x)^n = 1$.

10. Neka je $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ i k prirodan broj koji nije djeljiv sa n. Dokazati da je $1 + w^k + w^{2k} + \cdots + w^{(n-1)k} = 0$.

11. Dokazati da je zbir svih $n-$tih korijena jedinice jednak nuli.

12. Predstaviti u ravni skupove kompleksnih brojeva definisane sljedećim relacijama:

    a) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z + \mathrm{Im}\ z \le 1\}$.

    b) $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

    c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| < 2\}$.

    d) $\{z \in \mathbb{C} : \arg\frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}\}$.

    e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| + |z + 2| = 5\}$.

f) $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| - |z+2| > 3\}$.

g) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(iz) < 1,\ -1 < \mathrm{Im}\,(iz) < 1\}$.

h) $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ $(0 \le \alpha < \beta \le 2\pi)$.

i) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Re}\ z + 1\}$.

j) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z + \mathrm{Im}\ z > 1\}$.

13. Dokazati da tri različite tačke z_1, z_2 i z_3 iz kompleksne ravni pripadaju jednoj pravoj ako i samo ako je $\mathrm{Im}\ \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 0$.

14. Dokazati da je skup $k = \{z : \frac{|z-a|}{|z-b|} = \lambda\}$, gdje su a i $b \neq a$ kompleksni brojevi, a λ pozitivan realan broj, kružnica u $\mathbb{C}$ za $\lambda \neq 1$, a prava linija za $\lambda = 1$. Odrediti centar i polurečnik kružnice k. Utvrditi geometrijsko značenje tačaka a i b.

15. Neka je $S = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| + |z+a| = 2c\}, a \in \mathbb{C}, c \geq 0$.

    (a) Opisati S za $c = 0$.

    (b) Dokazati da je za $c > |a|$ $S = \emptyset$.

    (c) Neka je $a \in \mathbb{R}, a > 0$ i $0 < c < a$. Dokazati da je tada $S = \{x + iy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1\}$.

    (d) Opisati S ako je $a = c > 0$.

16. Neka tačke z_1, z_2, z_3 pripadaju jediničnoj kružnici sa centrom u $0 \in \mathbb{C}$. Dokazati da one obrazuju jednakostranični trougao ako i samo ako je $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

17. Dokazati da su z_1, z_2 i z_3 tjemena jednakostraničnog trougla ako i samo ako je $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$.

18. Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi takvi da je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ i $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Dokazati da su z_1, z_2 i z_3 tjemena jednakostraničnog trougla.

19. Neka se tačke $z_1, \dots, z_k$ nalaze sa iste strane neke prave koja prolazi kroz koordinatni početak. Dokazati da tada isto svojstvo imaju i tačke $\frac{1}{z_1}, \dots \frac{1}{z_n}$.

20. Dokazati nejednakosti:

    a)
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|,$$
    pri čemu jednakost važi ako i samo ako $\arg z_k = \arg z_1$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

    b)
$$1 - \sum_{k=1}^{n} |z_k| \le \left|\prod_{k=1}^{n} (1 - z_k)\right|, \text{ ako } |z_k| < 1, k = 1, \dots, n.$$

21. Dokazati nejednakosti:

    a) $|(1+z)^n - 1| \le (1+|z|)^n - 1$.

    b) $|z-1| \le ||z|-1| + |z||\arg z|$.

22. Riješiti jednačine:

    a) $\prod_{k=1}^{n}(\cos kx + i \sin kx) = 1$. b) $z^{n-1} = \overline{z}$, $n \in \mathbb{N}$.

23. Dokazati: a)
$$\left|\frac{a+b}{1+\overline{a}b}\right| < 1 \text{ ako je } |a| < 1 \text{ i } |b| < 1. \tag{1.2}$$

    b) Ako su a i b kompleksni brojevi sa svojstvom da je modul jednog od njih jednak 1, onda je
$$\left|\frac{a+b}{1+\overline{a}b}\right| = 1.$$

24. Ako se zna da jednačina $z^5 - 2z^4 + 2z^2 - 4 = 0$ ima kompleksan korijen čiji je argument $\pi/4$, odrediti taj korijen.

25. Neka je $p(z) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n z^n$ polinom sa realnim koeficientima, takvim da je $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Dokazati da polinom $p(z)$ nema nula u skupu $|z| > 1$.

26. (a) Dokazati da ako su a, b kompleksni brojevi a c realan broja, tada $az + \overline{az} + c = 0$ jednačina prave linije.

    (b) Izvesti uslove paralelnosti i normalnosti pravih čije su jednačine $az + \overline{az} + c = 0$ i $bz + \overline{b}\overline{z} + d = 0$.

27. Dokazati da ako su $w_0 = 1, w_1, \ldots, w_{n-1}$ različiti n-i korijeni iz jedinice, tada su odgovarajuće tačke tjemena pravilnog mnogougla i da pri tome važi:

    (a) $d^2(w_i, w_k) = (w_i - w_k)(\overline{w_i} - \overline{w_k})$.

    (b) Suma kvadrata rastojanja proizvoljne tačke z ravni do tjemena tog mnogougla iznosi $n(1 + d^2)$.

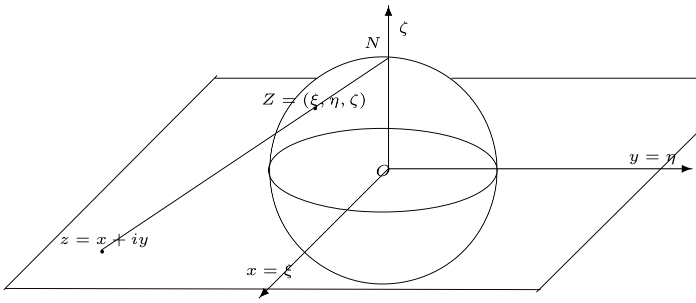
    (c) Suma kvadrata rastojanja proizvoljne tačke z koja pripada kružnici poluprečnika R do tjemena pravilnog mnogougla upisanog u tu kružnicu iznosi nR^2.

2 Proširena kompleksna ravan. Riemannova sfera

Sa $S^2 \subseteq R^3$ označimo jediničnu sferu tj. sferu sa centrom u tački $(0,0,0)$ i poluprečnikom 1. Njena jednačina je

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Skup kompleksnih brojeva možemo interpretirati kao skup tačaka ravni $\zeta = 0$. Naime, svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ možemo pridružiti tačku $(x, y, 0)$ koja pripada ravni $\zeta = 0$. Pretpostavićemo da se realna osa poklapa sa ξ-osom a imaginarna osa $x = 0$ sa η-osom. Iz tačke $N(0,0,1)$, koju ćemo zvati sjevernim polom sfere S^2, konstruišimo pravu koja siječe ravan $\zeta = 0$ u tački $(x, y, 0)$. Tačku (ξ, η, ζ) različitu od sjevernog pola, u kojoj ta prava siječe sferu S^2 zovemo *stereografskom projekcijom* tačke z (ili kompleksnog broja $z = x + yi$) na sferu S^2, a opisano preslikavanje ravni $\zeta = 0$ na sferu, *stereografskim projektovanjem*. Stereografsko projektovanje, koje ćemo označavati sa SP uspostavlja obostrano jednoznačnu korespondenciju između kompleksne ravni i sfere S^2 bez sjevernog pola (vidi sliku 1.3).



Slika 1.3: Stereografska projekcija.

Neka je $Z(\xi, \eta, \zeta)$ tačka sfere S^2 različita od sjevernog pola $N(0, 0, 1)$, $z(x, y, 0)$ tačka ravni $\zeta = 0$. Tačke N, Z i z pripadaju jednoj pravoj ako i samo ako tačke $(0, 0, 0)$, $(\xi, \eta, \zeta - 1)$ i $(x, y, -1)$ takođe tačke jedne prave. Parametarske jednačine prave l koja sadrži sjeverni pol N i tačku $(x, y, -1)$ imaju sljedeći oblik

$$\xi = tx, \ \eta = ty, \ \zeta = 1 - t. \tag{2.1}$$

Zajedničku tačku prave l i sfere S^2 (drugu, pored sjevernog pola N) dobijamo iz jednačine

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (1 - t)^2 = 1,$$

Odavde slijedi da je

$$t = \frac{2}{1+|z|^2}$$

i

$$\xi = \frac{2x}{1+|z|^2},\ \eta = \frac{2y}{1+|z|^2},\ \zeta = -\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Dakle,

$$SP(z) = SP(x,y,0)SP(x+iy) = \left(\frac{2\operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{2\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, -\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right).$$

Jednostavno se izvode i formule za inverzno preslikavanje :

$$SP^{-1}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\xi}{1-\zeta} + i\frac{\eta}{1-\zeta}.$$

Preslikavanje $SP : \mathbb{C} \mapsto S^2 \setminus \{N\}$ je bijekcija. U tačke bliske sjevernom polu slikaju se tačke koje su udaljene od koordinatnog početka, ali se nijedna tačka ravni $\zeta = 0$ ne slika u sjeverni pol N. Ako želimo obezbijediti da sjeverni pol bude ravnopravan sa ostalim tačkama sfere S^2, tada, na osnovu prethodnog zapažanja, ravan $\mathbb{C}$ treba proširiti još jednom tačkom, i opet na osnovu prethodnog zapažanja, logično je reći da je to beskonačno udaljena tačka (ili beskonačnost), koju ćemo označiti sa ∞. Tako dobijamo $\overline{\mathbb{C}} := C \cup \{\infty\}$, *prošireni skup kompleksnih brojeva*, odnosno *proširenu kompleksnu ravan*. Postavimo $SP(\infty) = N$. Produženo preslikavanje $SP : \overline{\mathbb{C}} \mapsto S^2$ je bijekcija. Prostor $S^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$ nazivamo *Riemannovom sferom*. Beskonačno udaljena tačka može se, geometrijski, posmatrati kao potpuno ravnopravna sa ostalim tačkama kompleksne ravni, kao što je sjevereni pol N ravnopravna tačka sa ostalim tačkama sfere. Definišimo još sljedeće aritmetičke operacije u kojima učestvuje beskonačno udaljena tačka: $a \pm \infty = \infty \pm a = \infty$, i $a/\infty = 0$ ako je $a \in \mathbb{C}$; $a/0 = \infty$, $a \cdot \infty = \infty \cdot a := \infty$ ako je $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. U mnogim sučajevima operacije u kojima učestvuje ∞ nisu definisane; u aritmetičkim operacijama ∞ nije ravnopravna sa ostalim tačkama kompleksne ravni. Skup $\overline{\mathbb{C}}$ sa ovako dodefinisanim operacijama ne čini polje. Primijetimo da se za beskonačno udaljenu tačku pojmovi realni dio, imaginarni dio i argument prosto ne definišu, dok je $|\infty| = +\infty$.

2.1 Metrika na $\overline{\mathbb{C}}$

Teorema 2.1. *Funkcija* $\rho : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \mapsto \mathbb{R}$ *definisana sa*

$$\rho(z_1, z_2) = d(SP(z_1), SP(z_2)),$$

gdje je d *rastojanje tačaka* $Z_1 = SP(z_1)$ *i* $Z_2 = SP(z_2)$ *na sferi, je metrika na* $\overline{\mathbb{C}}$ *i za svako* $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ *važe jednakosti:*

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}$$

i

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \ \rho(\infty, \infty) = 0.$$

Dokaz. Dokaz da je ρ metrika počiva na dvijema činjenicama: d je metrika na S^2 i $SP : \overline{\mathbb{C}} \mapsto S^2$ je bijekcija.

Direktno is definicije funkcije ρ slijedi $\rho(z, w) \geq 0$, za svako z i w iz $\overline{\mathbb{C}}$. Dalje, $\rho(z, w) = 0$ ako i samo ako $d(SP(z), SP(w)) = 0$, odnosno ako i samo ako $SP(z) = SP(w)$. Pošto je SP bijekcija, slijedi da je $\rho(z, w) = 0$ ako i samo ako $z = w$. Pored toga, $\rho(z, w) = d(SP(z), SP(w)) = d(SP(w), SP(z)) = \rho(w, z)$. Nejednakost trougla slijedi iz sljedećih jednakosti i nejednakosti:

$$\begin{aligned}\rho(z, w) &= d(SP(z), SP(w)) \\ &\leq d(SP(z), SP(t)) + d(SP(t), SP(w)) = \rho(z, t) + \rho(t, w).\end{aligned}$$

Dakle, ρ je metrika na $\overline{\mathbb{C}}$.

Ako je $z = x + iy$ i $w = u + iv$, tada je

$$SP(z) = \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\, z}{1 + |z|^2}, \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{1 + |z|^2}, -\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}\right) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \in S^2$$

i

$$SP(w) = \left(\frac{2\,\mathrm{Re}\, w}{1 + |w|^2}, \frac{2\,\mathrm{Im}\, w}{1 + |w|^2}, -\frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2}\right) = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \in S^2,$$

pa je

$$\begin{aligned}d^2(SP(z), SP(w)) &= (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ &= 2 - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2).\end{aligned}$$

Odavde, uzimajući u obzir jednakosti,

$$\xi_1\xi_2 = \frac{xu}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)},\ \eta_1\eta_2 = \frac{yv}{(1+|z|^2 1+|w|^2},$$

$$\zeta_1\zeta_2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

i

$$|z-w|^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2(xu+yv)$$

slijedi da je

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}.$$

Po definiciji je $\rho^2(z,\infty) = d^2(Z,N)$, gdje je

$$Z = (\xi,\eta,\zeta) = SP(z) = \left(\frac{\mathrm{Re}\ z}{1+|z|^2}, \frac{\mathrm{Im}\ z}{1+|z|^2}, -\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right).$$

Zato je

$$\rho^2(z,\infty) = \frac{4x^2}{(1+|z|^2)^2} + \frac{4y^2}{(1+|z|^2)^2} + \frac{4}{(1+|z|^2)^2} = \frac{4}{1+|z|^2},$$

odnosno

$$\rho(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}},\ \rho(\infty,\infty) = 0.$$

Na kraju, očigledno je $\rho(\infty,\infty) = d(N,N) = 0$. Teorema je dokazana. $\square$

Primjer 2.2. Preslikavanje SP kružnice i prave preslikava u kružnice. Njena inverzna funkcija $f = SP^{-1}$ preslikava kružnice u kružnice ili u prave, zavisno od toga da li te kružnice sadrže sjeverni pol $N = (0,0,1)$. Dokažimo posljednje tvrđenje.

Naime, krug k na sferi S^2 je presjek neke ravni i sfere: $k = \{a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0, \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$, gdje su a, b, c i d realni brojevi, takvi da je $|d| < \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. (Posljednji uslov obezbjeđuje da se ravan i sfera sijeku). Neka je $k_1 = f(k)$. Tada je $z = x + iy \in k_1 \iff z = \dfrac{\xi}{1-\zeta} + i\dfrac{\eta}{1-\zeta}$, pri čemu je

$$\xi = \frac{2x}{1+x^2+y^2},\ \ \eta = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \text{ i } \zeta = -\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}.$$

Zato je

$$\frac{2xa}{1+x^2+y^2}+\frac{2by}{1+x^2+y^2}-c\left(\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)+d=0,$$

odnosno

$$2ax+2by+(d-c)+(d+c)(x^2+y^2)=0.$$

Posljednja jednačina je jednačina kružnice ili prave, zavisno od toga da li je $d+c\neq 0$ ili $d+c=0$. Uslov $a^2+b^2+c^2\geq d^2$ obezbjeđuje da ova jednačina ima rješenja.

Zadaci

1. Odrediti stereografske projekcije tačaka 1, -1, i, $\frac{i+1}{\sqrt{2}}$.

2. Preslikati steregrafskom projekcijom skupove:

   a) Polupravu $D=\{z\in\mathbb{C}:\arg z=\frac{\pi}{4}\}$.

   b) Polupravu $\arg z=\alpha$.

   c) Kružnicu $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|=R\}$.

   d) Poluravan $D=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\ z>0$.

3. a) Dokazati da su tačke Z i Z' dijametralno suprotne tačke na Riemannovoj sferi ako i samo ako inverzne stereografske projekcije tih tačaka zadovoljavaju jednakost: $zz'=-1$.

   b) U kakvom su odnosu tačke na sferi koje su stereografske projekcije tačaka z i $\dfrac{1}{z}$.

   c) Odrediti slike tjemena kocke upisane u Riemannovu sferu, čije su strane paralelne sa Oxy, Oyz i Ozx ravnima.

   d) Neka su z i z' inverzne stereografske projekcije tačaka Z i Z' i neka je N sjeverni pol. Koristeći sličnost trouglova $\triangle NZZ'$ i $\triangle Nz'z$, dokazati sljedeće relacije za euklidsko rastojanje tačaka Z i Z' odnosno tačaka Z i N:

$$d(Z,Z') = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}, \;\; d(Z,N) = \frac{2}{\sqrt{(1+|z|^2)}}.$$

4. U šta se slikaju dvije paralelne prave stereografskom projekcijom?

5. Napisati formule za $SP(z)$ u sfernim koordinatama