David Kalaj

ZBIRKA ZADATAKA IZ KOMPLEKSNE ANALIZE

I izdanje

Univerzitet Crne Gore

Podgorica, 2006

Komisija za izdavaku djelatnost i informatiku Univerziteta Crne Gore odobrila da se ova zbirka štampa kao univerzitetski udžbenik.

Naslov
Dr David Kalaj
Zbirka zadataka iz kompleksne analize
I izd.

Recenzenti
Prof. dr Miodrag Perović
Redovni profesor Prirodno Matematicckog fakulteta u Podgorici
Prof. dr Žarko Pavićević
Redovni profesor Prirodno-matematicckog fakulteta u Podgorici

Predgovor

Ova zbirka je napisana prema važećem programu kursa iz Kompleksne analize za studente treće godine Matematičkog fakulteta. Ali ona može da posluži i studentima druge godine Prirodno Matematičkog, Mašinskog i Elektrotehničkog fakulteta za odgovarajuće predmete, kao i studentima magistarskih studija za predmet Analiza.

Većina zadataka (uglavnom bez rješenja) se mogu naći u drugim zbirkama dok je jedan broj zadataka originalnog karaktera. Za većinu zadataka se daje rješenje ili su data uputstva za rješavanje. Zbirka sadrži tri glave i 365 zadataka. Na početku svake glave dat je sažet opis teorije; date su osnovne definicije, osnovne teoreme i neke formule koje se koriste u zadacima u tim glavama. Rješenja pojedinih zadataka su ilustrovana odgovarajućim slikama. Neke poznate teoreme iz kompleksne analize su formulisane u obliku zadataka. Napomenimo da su zadaci označeni sa $*$ složeniji od ostalih. Rješenja su originalna, u granicama mogućnosti, a metode su uglavnom standardne. Preporuka autora je da se prvo student upozna sa zadatkom i težinom tog zadatka prije no što gleda rješenje istog, ako nije u stanju da ga samostalno riješava ili ako ga ipak riješava a hoće da provjeri rezultat.

Zahvaljujem se recenzentima profesorima Miodragu Perović i Žarku Pavićević na korisnim sugestijama, primjedbama i ispravkama. Takođe se zahvaljujem Profesoru Stojanu Duboriji koji me je podstakao da sastavim ovu zbirku. Unaprijed se zahvaljujem i svima onima koji budu ukazali na greške, nedostatke i ostale propuste vezane za ovu zbirku.

Sadržaj

Glava 1

Kompleksni brojevi

1. **Definicija kompleksnih brojeva** Motivacija za uvođenje kompleksih brojeva je rođ ena iz neriješivosti kvadratne jednačine $x^2 + 1 = 0$ i drugih polinomnih jednačina u polju $\mathbb{R}$.

Neka su $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$: $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Tada definišemo operacije $+$ i $\cdot$ kako slijedi

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Teorema 1. *Trojka $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ čini polje. Pri tome neutralni element u odnosu na $+$ je $0 = (0, 0)$ a u odnosu na $\cdot$ je $1 = (1, 0)$. Inverzni element za $z = (x, y) \neq 0$ je $z' = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ koji se označava sa z^{-1}, $1/z$ ili $\dfrac{1}{z}$.*

Polje $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ iz prethodne teoreme se naziva *poljem kompleksnih brojeva* i označava sa $\mathbb{C}$. Skup $\mathbb{R}^2$ iz trojke $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ nazivamo skupom kompleksnih brojeva i takođe označavamo sa $\mathbb{C}$. Elemente ovog skupa nazivamo kompleksnim brojevima.

Kompleksan broj $(0, 1)$ označavamo sa i. Uzimajući još u obzir dogovor da se $(x, 0) = x(1, 0)$ označava sa x za kompleksan $z = (x, y)$ dobija uobičajenu oznaku $z = x + iy$. Broj x se tada naziva *realnim* dijelom a broj y *imaginarnim* dijelom kompleksnog broja $z = x + iy$ i piše $x = \mathrm{Re}\ z$ i $y = \mathrm{Im}\ z$.

2. **Kompleksno konjugovanje i modul** Ako je $z = x + iy$ kompleksan broj, onda se broj $w = x - iy$ naziva *konjugovano kompleksan* broju z i označava sa $\bar{z}$. Broj $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ nazivamo *modulom*, *apsolutnom vrijednosti* ili *normom* kompleksnog broja $z = x + iy$. Sljedeće dvije teoreme daju osnovna svojstva apsolutne vrijednosti i kompleksnog konjugovanja.

Teorema 2. *Preslikavanje $z \to \bar{z}$ iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ ima sljedeća svojstva:*

(i) (i) $\bar{\bar{z}} = z$.

(ii) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

(iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

(iv) $\overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$.

(v) $z + \bar{z} = 2x$.

(vi) $z - \bar{z} = 2iy$.

Teorema 3. *Preslikavanje $z \to |z|$ iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:*

(i) $|z| \geq 0$.

(ii) $|z|^2 = z\bar{z}$.

(iii) $|z| = 0$ *ako i samo ako je* $z = 0$.

(iv) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(nejednakost trougla).*

(v) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(vi) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

(vii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

3. **Argument kompleksnog broja**

Neka je $z = x + iy \neq 0$. Svaki realan broj φ koji je rješenje jednačine

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi,$$

nazivamo *argumentom* kompleksnog broja z. Skup rješenja gornjih jednačina se označava sa $\operatorname{Arg} z$.

Ako su $\varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z)$, onda postoji cio broj k tako da je $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, ili u terminima aritmetike $\varphi_1 \equiv \varphi_2 (\operatorname{mod} 2\pi)$. Onaj $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, $z \neq 0$, koji zadovoljava uslov $-\pi < \varphi \leq \pi$ mi ćemo označavati sa $\arg z$. Ponekada ćemo sa $\arg z$ označiti i funkciju čiji je kodomen $[0, 2\pi)$.

4. **Trigonometrijski i eksponencijalni oblik kompleksnog broja.** Kompleksan broj z čiji je modul r a argument φ može se napisati u trigonometrijskom obliku, odnosno eksponencijalnom obliku sa

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}, \tag{1.0.1}$$

gdje je $e^{i\varphi}$ u ovoj glavi samo oznaka za $\cos\varphi + i\sin\varphi$, dok u sljedećoj ćemo dati obrazloženje te oznake.

5. **Stepen i korijen** Reprezentacija (1.0.1) je pogodna za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$:

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Neka je n cio broj i $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Pomoću posljednjih formula se izvodi sljedeća *Moivreova formula*:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Neka je $z \neq 0$ kompleksan broj čiji je trigonometrijski zapis: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. n-ti korijen broja z je svaki broj w koji zadovoljava jednačinu $w^n = z$. Koristimo oznaku $w = \sqrt[n]{z}$. Koristeći Moivreovu formulu se dobija

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Jednu drugu interpretaciju kompleksnog broja možemo dobiti na tzv. Riemannovoj sferi (Zadatak **41**).

1.1 Algebra kompleksnih brojeva

U zadacima koji slijede tretirana su algebarska svojstva kompleksnih brojeva.

1. Napisati u obliku $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ sljedeće kompleksne brojeve:

1. $\frac{1}{i}$. 2. $\frac{1-i}{1+i}$. 3. $\frac{2}{1-3i}$. 4. $(1+i\sqrt{3})^3$.

5. $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$. 6. $(1+i)^n + (1-i)^n$.

2. Odrediti modul i argument sljedećih kompleksnih brojeva (a, b realni brojevi):

1. $3i$. 2. -2. 3. $2+2i$. 4. $-1-i$. 5. $6+2i$.

6. $2-5i$. 7. $-2+5i$. 8. $-2-5i$.

9. bi ($b \neq 0$). 10. $a+bi$ ($a \neq 0$).

3. Ako je $z = x + iy$ (x i y realni), odrediti realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

1. z^2. 2. $\frac{1}{z}$. 3. $\frac{z-1}{z+1}$. 4. $\frac{1}{z^2}$.

4. Odrediti sva značenja sljedećih korijena:

1. $\sqrt[3]{1}$. 2. $\sqrt[3]{8i}$. 3. $\sqrt[4]{-16}$. 4. $\sqrt[6]{-8}$.

5. $\sqrt[8]{1}$. 6. $\sqrt{1-i}$. 7. $\sqrt{3+4i}$. 8. $\sqrt[3]{-2+2i}$. 9. $\sqrt[5]{-4+3i}$.

5. Dokazati da za svaki kompleksan broj z važi :

$$|\sqrt{z^2-1} + z| + |\sqrt{z^2-1} - z| = |z-1| + |z+1|.$$

6. Dokazati da za kompleksne brojeve a i b važi tzv. jednakost paralelograma:

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

7. Dokazati Lagrangeov identitet:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - \sum_{1\le i<j\le n} |a_i\bar{b}_j - a_j\bar{b}_i|^2.$$

8. Dokazati nejednakosti:

a) $|a+b| \le |a| + |b|$. b) $||a| - |b|| \le |a+b|$.

c) $\left|\dfrac{|a|-|b|}{|c|+|d|}\right| \le \left|\dfrac{a+b}{c+d}\right|$. d) $|\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a| \le \sqrt{2}|a|$.

9. Dokazati nejednakosti:

a)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $\arg z_k = \arg z_1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

b)

$$1 - \sum_{k=1}^{n} |z_k| \le \left|\prod_{k=1}^{n} (1 - z_k)\right|, \text{ ako } |z_k| < 1, k = 1, \ldots, n.$$

10. Dokazati nejednakosti:

a) $|(1+z)^n - 1| \le (1+|z|)^n - 1$.

b) $|z-1| \le ||z|-1| + |z||\arg z|$.

11. Dokazati da za kompleksne brojeve $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n$ važi Cauchyeva nejednakost:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right).$$

12. Riješiti jednačine:

a) $\prod_{k=1}^{n}(\cos kx + i\sin kx) = 1$. b) $z^{n-1} = \overline{z}$, $n \in \mathbb{N}$.

13. Dokazati: a)

$$\left|\frac{a+b}{1+\overline{a}b}\right| < 1 \text{ ako je } |a| < 1 \text{ i } |b| < 1. \tag{1.1.1}$$

b) Ako su a i b bilo koji kompleksni brojevi sa svojstvom da jedan od njih ima modul 1 onda je

$$\left|\frac{a+b}{1+\overline{a}b}\right| = 1.$$

14. Dokazati da postoji kompleksan broj z koji zadovoljava jednakost $|z+a|+|z-a|=2|c|$ ako i samo ako je $|a|\leq|c|$. Ako je ovaj uslov zadovoljen odrediti najmanju i najveću vrijednost funkcije $|z|$.

15. Neka je $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ i h cio broj.

a) Dokazati da je $1+\omega^h+\cdots+\omega^{(n-1)h}=0$.

b) Odrediti čemu je jednak izraz: $1-\omega^h+\omega^{2h}-\cdots+(-1)^{n-1}\omega^{(n-1)h}$.

c) Dokazati jednakost: $1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\dfrac{n}{\omega-1}$.

16. Dokazati da važe jednakosti:

(i) $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1\right)$,

(ii) $x^{2n+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$,

pa na osnovu toga dokazati jednakosti:

1. $\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$, $n>1$.
2. $\cos\dfrac{\pi}{2n}\cos\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$, $n>1$.
3. $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}$.
4. $\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

17. Dokazati:

1. $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.
2. $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.
3. $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$.
4. $\sin x+\sin 3x+\cdots+\sin(2n-1)x=\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$.

5. Ako je $I = \sin x - \sin 2x + \cdots + (-1)^{n-1} \sin nx$ tada je

$$I = \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\cos \frac{x}{2}} & \text{ako je } n \text{ paran,} \\ -\dfrac{\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\cos \frac{x}{2}} & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

18. Dokazati:

1. $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cdots + \cos(\alpha + n\beta) = \dfrac{\sin \frac{(n+1)}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right).$
2. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \cdots + \sin(\alpha + n\beta) = \dfrac{\sin \frac{(n+1)}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right).$
3. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 nx = \dfrac{2n-1}{4} + \dfrac{\sin(2n+1)x}{4\sin x}.$

19. Dokazati da korijeni jednačine $(z-b)^n = a$, $a \neq 0$, čine tjemena nekog pravilnog poligona.

20. Ako se zna da jednačina $z^5 - 2z^4 + 2z^2 - 4 = 0$ ima kompleksan korijen čiji je argument $\pi/4$ odrediti taj korijen.

21. Neka je $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ polinom sa realnim koeficijentima. Dokazati sljedeća tvrđenja:

a) Ako je z nula polinoma $p(z)$, onda je i $\bar{z}$ takođe nula polinoma $p(z)$. Zaključiti da je broj realnih nula takvog polinoma iste parnosti kao i stepen polinoma.

b) Ako važi $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, onda polinom $p(z)$ nema nula u oblasti $|z| > 1$.

22. Neka je $p(z)$ neki polinom, $m \in \mathbb{N}$ i $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Dokazati da je

$$\frac{p(1) + p(\omega) + p(\omega^2) + \cdots + p(\omega^{m-1})}{m} = p(0).$$

23. Neka je $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ i $\arg z_1 \leq \arg z_2 \leq \arg z_3$. Dokazati da je

$$\arg \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{1}{2} \arg \frac{z_2}{z_1}.$$

1.2 Geometrija kompleksnih brojeva

U zadacima koji slijedi broj z iz polja $\mathbb{C}$ je tretiran kao tačka ili vektor euklidskog prostora $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ na kojem je fiksiran basis $e_1 = 1 = (1,0)$ i $e_2 = i = (0,1)$ i metrika $d(z,w) = |z - w|$.

Krug, kružnica, prava i poluravan.

1. Skup $D(a, r) = \{z : |z - a| < r\}$ nazivamo *krugom* ili *diskom* u kompleksnoj ravni.
2. Skup $S(a, r) = \{z : |z - a| = r\}$ nazivamo *kružnicom* u kompleksnoj ravni.
3. Skup $\bar{D}(a, r) = \{z : |z - a| \leq r\}$ nazivamo *zatvorenim krugom* u kompleksnoj ravni.
4. Skup $p = \{z : \mathrm{Re}\,(za) = \beta\}$, gdje je $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$, nazivamo *pravom* u kompleksnoj ravni.
5. Skup $P = \{z : \mathrm{Re}\,(za) > \beta\}$, gdje je $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ nazivamo *poluravni* u $\mathbb{C}$.

24. a) Neka je $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ i $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Dokazati da su tačke z_1, z_2 i z_3 tjemena jednakostraničnog trougla upisanog u neku kružnicu sa centrom u koordinatnom početku. Dokazati da važi i obratno tvrđenje.

b) Dokazati da važi $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ ako i samo ako tačke z_1, z_2 i z_3 čine tjemena jednakostraničnog trougla (ne obavezno sa centrom u koordinatnom početku).

25. Dokazati da ako je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ i $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, onda su tačke z_1, z_2, z_3 i z_4 ili tjemena nekog pravougaonika ili se dvije i dvije poklapaju.

26. Tačke $z_1, z_2, \ldots, z_n$ su sa jedne strane jedne prave koja prolazi kroz koordinatni početak. Dokazati da isto važi i za tačke $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$. Zaključiti da je $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{z_i}{z_j} \neq 0$.

27. Dokazati da su tačke z_1, z_2, z_3 i z_4 uzastopna tjemena nekog paralelograma ako je $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0$.

28. Neka je n prirodan broj i $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a) Odrediti ostala tjemena pravilnog n-tougla ako je z_1 jedno tjeme a z_0 je centar opisanog kruga.

b) Ako su z_1 i z_2 dva susjedna tjemena pravilnog n-tougla, odrediti ostala tjemena.

29. Neka su a i b dva tjemena nekog kvadrata. Odrediti ostala tjemena.

30. Odrediti tačku a' simetričnu tački a u odnosu na pravu $p : z = z_0 + tb$.

31. Data su tri tjemena z_1, z_2 i z_3 paralelograma. Odrediti četvrto tjeme.

32. Pri kakvim uslovima

a) tri različite tačke u kompleksnoj ravni pripadaju jednoj pravoj?

b) četiri različite tačke u kompleksnoj ravni leže na jednoj kružnici ili na jednoj pravoj?

33. Neka su $S(a, r)$ i $S(b, R)$ dvije kružnice u kompleksnoj ravni. Neka su

$z(t) = a + re^{it}$ i $w(t) = b + Re^{it+it_0}$ tačke tih kružnica redom. Dokazati da tada postoji tačka z_0 kompleksne ravni takva da je

$$|z(t) - z_0|^2 - |w(t) - z_0|^2 = const.$$

Napomenimo, kao kuriozitet da je zadatak 33 preformulacija jednog zadatka sa matematičke olimpijade održane 1979 god.

34. Ako je R poluprečnik kružnice, opisane oko pravilnog n-tougaonika a_1, $a_2, \ldots, a_n$, dokazati:

1. Zbir kvadrata svih dijagonala i svih strana n-tougaonika jednak je n^2R^2.
2. Zbir svih strana i svih dijagonala jednak je $nR\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{2n}$.
3. Proizvod svih strana i svih dijagonala iznosi $n^{n/2}R^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

35. Odrediti zbir 50-tih stepena svih strana i svih dijagonala pravilnog 100-ugaonika, upisanog u krug poluprečnika r.

36. Koji skupovi u kompleksnoj ravni su definisani relacijama:

1. $|z - z_0| < R$.
2. $|z - z_0| = R$.
3. $|z - z_0| > R$.
4. $|z - 2| + |z + 2| = 5$.
5. $|z - 2| - |z + 2| > 3$.
6. $|z - z_1| = |z - z_2|$.
7. $\mathrm{Re}\ z \geq C$, $\mathrm{Im}\ z < C$.
8. $0 < \mathrm{Re}\,(iz) < 1$.
9. $-1 < \mathrm{Im}\,(iz) < 1$.
10. $0 < \arg z < \pi/2$.
11. $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ $(0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi)$.
12. $|z| = \mathrm{Re}\ z + 1$.
13. $\mathrm{Re}\ z + \mathrm{Im}\ z > 1$.
14. $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = K$, $K > 1$.

37. 1. Odrediti familiju krivih određenih relacijom

$$|z^2 - 1| = \lambda\ (\lambda > 0).$$

Za koje vrijednosti parametra λ ova familija se svodi na jednu krivu a za koje λ se raspada na više krivih?

2. Pojasniti ovo pitanje za familiju datu jednačinom:

$$|z^2 + az + B| = \lambda\ (\lambda > 0).$$

38. Dokazati da je skup definisan jednačinom $\delta z\overline{z} + a\overline{z} + \overline{a}z + \gamma = 0$ $(\delta, \gamma \in \mathbb{R})$:

1. Kružnica koja ne prolazi kroz koordinatni početak ako je $\delta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\gamma\delta - |a|^2 < 0$.

2. Kružnica koja prolazi kroz koordinatni početak ako je $\delta \neq 0$, $\gamma = 0$.

3. Prava koja prolazi kroz koordinatni početak ako je $\delta = \gamma = 0$.

Dokazati obratno tvrđenje tj. jednačina svake kružnice ili prave može se napisati u obliku $\delta z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + \gamma = 0$, $(\gamma, \delta \in \mathbb{R})$.

39. a) Dokazati da je jednačina prave koja prolazi kroz tačke z_1 i z_2:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Dokazati da je jednačina kružnice koja prolazi kroz tačke z_1, z_2 i z_3 koje ne pripadaju jednoj pravoj:

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

40. Napisati jednačinu elipse, hiperbole i parabole u kompleksnim oznakama.

41. Preslikavanje $f : S^2 \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ $(\infty \notin \mathbb{R}^2)$ iz jedinične sfere (Riemannove sfere) u proširenu kompleksnu ravan $(\overline{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$ definisano sa:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \ f(0,0,1) = \infty,$$

naziva se stereografska projekcija.

a) Dati geometrijsku definiciju stereografske projekcije. Dokazati da je f bijekcija između odgovarajućih skupova koja kružnice preslikava u kružnice ili u prave, zavisno od toga da li kružnice u domenu sadrže sjeverni pol $N = (0, 0, 1)$.

b) Dokazati da su tačke Z i Z' dijametralno suprotne tačke na Riemannovoj sferi ako i samo ako slike tih tačaka pri stereografskoj projekciji zadovoljavaju jednakost: $z\overline{z'} = -1$.

c) Odrediti slike tjemena kuba upisanog u Riemannovoj sferi a stranice su mu paralelne x,y i z ravnima.

d) Neka su z i z' stereografske projekcije tačaka Z i Z' i neka je N sjeverni pol. Koristeći sličnost trouglova $\triangle NZZ'$ i $\triangle Nz'z$, dokazati sljedeće relacije za euklidsko rastojanje tačaka Z i Z' odnosno tačaka Z i N:

$$d(Z, Z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}, \ d(Z, N) = \frac{2}{\sqrt{(1 + |z|^2)}}.$$

e) Ako sa ρ označimo metriku na $\overline{\mathbb{C}}$, definisanu sa $\rho(z,z') = d(Z,Z')$, u oznakama pod d), naći funkcije oblika $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ili $w = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ koje zadovoljavaju uslov $\rho(z,z') = \rho(w(z),w(z'))$, za sve $z,z' \in \mathbb{C}$.

f) Odrediti slike tjemena pravilnog proizvoljnog tetraedra upisanog u Riemannovu sferu.

g) Odrediti radijus R kružnice koja se dobija na sferi projekcijom kružnice $S^1(a,r) = \{z : |z-a| = r\}$. Koje oblasti na sferi se sažimaju a koje se šire stereografskom projekcijom?